$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

lineer denklem sisteminin çözümüdür.

Örk: $3x_1 + 2x_2 = 1$, $x_1 + 3x_2 = 5$ lineer sistemini kramer kuralı ile çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad |A| = 7 \neq 0$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad |A_1| = -7$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad |A_2| = 14$$

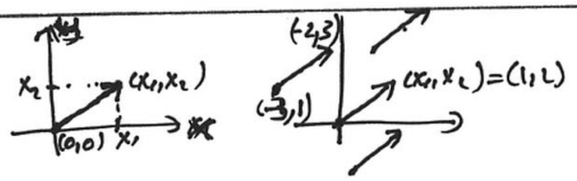
$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. VEKTÖR UZAYLARI

En basit vektör uzayları öklidyen vektör uzayları $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ dir. Örneğin $\mathbb{R}^2$'de vektörler 2×1 tipinde matrislerdir. Sıfırdan farklı $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vektörü düzlemde $(0,0)$ noktasından (x_1, x_2) noktasına olan doğru parçasını gösterir. Aynı uzunluğa ve yöne sahip bütün doğru parçaları bir vektörü ifade eder.

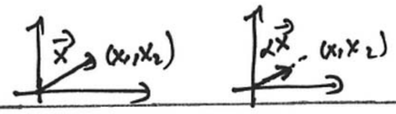


Her $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vektörü ve her α skaleri için $\alpha\vec{x}$

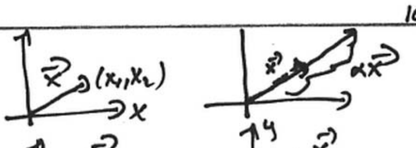
$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır.

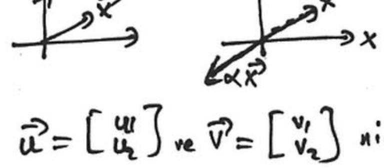
$0 < \alpha \leq 1$



$\alpha > 1$



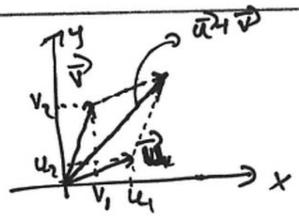
$\alpha < 0$



İki vektör $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ nin toplamı $\vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır.



$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Tanım: Bir V kümesi üzerinde + ve · işlemleri ile tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan V kümesine bir vektör uzayı denir.

a) x ve y V'nin herhangi iki elemanı ise, x+y'de V'nin bir elemanıdır. (V, + işlemine göre kapalıdır)

1) $x + y = y + x \quad \forall x, y \in V$

2) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in V$

3) $\forall x \in V$ için $x + 0 = x$ olacak şekilde bir $0 \in V$ vardır.

4) $\forall x \in V$ için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $-x \in V$ vardır.

b) x, V'nin herhangi bir elemanı ve α herhangi bir skalar ise αx'de V'nin elemanıdır. (V, · işlemine göre kapalıdır)

5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V$

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ 〃 〃

8) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in V$

V'nin elemanlarına vektör denir ve genellikle u, v, w, x, y, z ile gösterilir.

örk: 1) $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

2) $C[a,b]$, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi. $f, g, h \in C[a,b]$

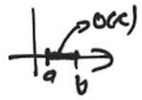
$f+g=?$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$\alpha . f = ?$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

$0(x) = 0$.



3) P_n, derecesi n'den küçük bütün polinomların kümesi olsun.

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

örk: P_3 $\quad x^2+x+1 \in P_3$

$2x \in P_3$

$1 \in P_3$

$x^3 + x \notin P_3$

$p \in P_n \quad q \in P_n$

$p+q=?$

$(p+q)(x) = p(x)+q(x)$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$

$p(x)+q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_{n-1}+b_{n-1}) x^{n-1}$

αp

$(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}$

P_n vektör uzayıdır

4) P ile derecesi n'ye eşit olan polinomların kümesini gösterelim.

$n=3$ olsun. $p(x) = 2x^3 + x + 3 \in P$

$q(x) = -2x^3 + x^2 - 1 \in P$

$p(x)+q(x) = x^2 + x + 2 \notin P$

5) $R^{m \times n}$ ile $m \times n$ tipindeki bütün matrislerin kümesini gösterelim. Toplama ve çarpım matrislerde tanımlanan toplama ve çarpım olsun. Bu durumda $R^{m \times n}$ vektör uzayıdır.

Teorem: V bir vektör uzayı ve $\forall x \in V$ ise

i) $0x = 0$ $\quad (0 . \vec{x} = \vec{0})$

ii) $x+y=0$ ise $y=-x$

iii) $(-1)x = -x$

dir.

ALT UZAYLAR

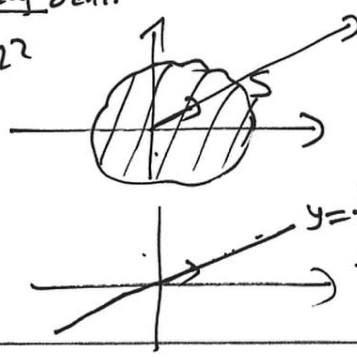
Tanım: Bir V vektör uzayının boş olmayan bir S kümesi aşağıdaki iki şartı sağlarsa S'ye V'nin bir alt uzayı denir.

1) $\forall x \in S$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \in S$

2) $\forall x, y \in S$ için $x+y \in S$

$\{0\}$ ve V her V vektör uzayının alt uzayıdır. Bunların dışındaki alt uzaylara öz alt uzay denir.

örk: 1) $\mathbb{R}^2$



$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \frac{x}{2} \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

2) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in S \quad \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \in S$

1) $\alpha \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \end{bmatrix} \in S$

2) $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 0 \end{bmatrix} \in S$

S, $\mathbb{R}^2$ nin alt uzayıdır.

3) $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \in S \quad \alpha = 3 \in \mathbb{R}$

$\alpha \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3 \end{bmatrix} \notin S$

S alt uzay değil.

4) $S = \left\{ A \in R^{3 \times 2} : a_{11} = -a_{12} \right\}$

$\begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \\ d & e \end{bmatrix} \in S \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha a \\ \alpha b & \alpha c \\ \alpha d & \alpha e \end{bmatrix} \in S$$

2) $\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 \end{bmatrix} \in S$, $\begin{bmatrix} a_2 & -a_2 \\ b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 \end{bmatrix} \in S$

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 \\ b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -a_2 \\ b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -a_1-a_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d_1+d_2 & e_1+e_2 \end{bmatrix} \in S$$

S, $R^{3\times 2}$ nin bir alt uzayıdır.

Bir matrisin sıfır uzayı (null space)

A, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. $N(A)$, $Ax=0$ homojen sistemin bütün çözümlerinin kümesini göstersin. Yani

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$N(A)$, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayıdır.

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in N(A) \Rightarrow Ax=0$

$\alpha x \in N(A)$? $\quad A(\alpha x)=0$?

$(\alpha A)x = 0 \quad A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\cdot 0 = 0$

2) $x_1 \in N(A)$ $\quad x_2 \in N(A)$

$x_1 + x_2 \in N(A)$?

$A(x_1+x_2) = 0$?

$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0+0 = 0$

$N(A)$, $\mathbb{R}^n$'nin alt uzayıdır.

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $N(A) = ?$

$Ax = 0 \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 \quad = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$-x_2 - 2x_3 = 0 \qquad x_3 = \alpha$

$x_2 = -2\alpha$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 = \alpha$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

GERME (GATI) (SPAN)

Tanım: $v_1, v_2, \dots, v_n$ V vektör uzayında vektörler olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalerler olmak üzere

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

formundaki toplama $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin lineer birleşimi denir. $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin bütün lineer birleşimlerinin kümesine $v_1, v_2, \dots, v_n$'lerin

germe kümesi (span) denir. Ve span$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ile gösterilir.

örk: $\mathbb{R}^3$'de e_1 ve e_2 vektörlerinin gerdiği küme

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

formundadır.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorem: $v_1, v_2, \dots, v_n$ bir V vektör uzayının vektörleri ise span$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ V'nin bir alt uzayıdır.

Tanım: V'nin her vektörü $v_1, v_2, \dots, v_n$'lerin lineer birleşimi olarak yazılıyorsa $v_1, v_2, \dots, v_n$'ler V için germe kümesi (span) (çatısı) denir. (veya V, $v_1, v_2, \dots, v_n$'ler tarafından gerilir denir)

örk: 1) Aşağıdakilerden hangileri $\mathbb{R}^3$ için ~~gerdiği~~ için germe kümesidir.

a) $\{e_1, e_2\}$ $\quad$ b) $\{e_1, e_2, e_3\}$

c) $\{e_1, e_2, e_3, (1,1,1)^T\}$

d) $\{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\}$

a) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (a,b,c)^T \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 \,?$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \alpha e_1 + \beta e_2$$

b) $\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \begin{bmatrix} \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

$\alpha = a \quad \beta = b \quad \gamma = c$

$$\begin{bmatrix} r_2\\ s\\ z\end{bmatrix} = r_2 e_1 + s e_2 + z e_3$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbb{R}^3$'ü gerer.

c) $\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \xi \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\xi\\ \beta+\xi\\ \gamma+\xi\end{bmatrix}$$

$\xi = 0 \quad \alpha = a \quad \beta = b \quad \gamma = c$

$$\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -3\end{bmatrix} = 2e_1 + e_2 - 3e_3 + 0\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\\ \beta+\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma\end{bmatrix}$$

$\gamma = a \quad \beta = b-a \quad \alpha = c-b$

$$\begin{bmatrix} 1\\ 3\\ 2\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

2) $\{1+x, 1-x\}$'in gerdiği uzay P_2 midir?

$ax+b \in P_2$

$$ax+b = \alpha(1+x) + \beta(1-x)$$
$$= \alpha + \alpha x + \beta - \beta x$$
$$= (\alpha-\beta)x + \alpha + \beta$$

$\alpha - \beta = a$, $\alpha + \beta = b$ $\qquad \alpha = \frac{a+b}{2} \quad \beta = \frac{b-a}{2}$

$$2x+5 = \frac{7}{2}(1+x) + \frac{3}{2}(1-x)$$

$\mathbb{R}^2$'de $x_1 = \begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}$ $x_3 = \begin{bmatrix} 3\\ 5\end{bmatrix}$

$$x_3 = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{span}(x_1, x_2, x_3) = \text{span}(x_1, x_2)$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma(3x_1 + 2x_2)$$
$$= (\alpha + 3\gamma)x_1 + (\beta + 2\gamma)x_2$$

$$\text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(x_1, x_3) = \text{span}(x_2, x_3)$$

Teorem: a) Bir V vektör uzayı $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörleri tarafından geriliyor ve bu vektörlerden biri diğer $n-1$ vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılıyorsa bu vektör uzayı $n-1$ vektör tarafından gerilir.

b) Verilen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörleri için, birinin diğer $n-1$ vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilmesi için gerek ve yeter şart $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$ denklemini sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ skalerlerinin olmasıdır.

Tanım: Bir V vektör uzayında
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$$
denklemini ~~sağlayan yalnız~~ yalnız
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$
skalerleri sağlıyorsa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir.